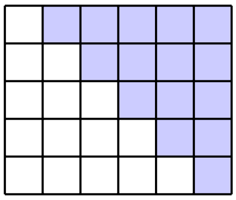
Los siguientes ejercicios se resuelven de forma más rápida y elegante usando un diagrama. En algunos, el diagrama será más explícito. Otros aceptarán varios diagramas complementarios. Aunque seas capaz de resolverlos sólo con cuentas, se recomienda que busques el mejor diagrama que simplifique el problema.

A modo de introducción, empezaremos con algunos que ya muchos conoceréis.

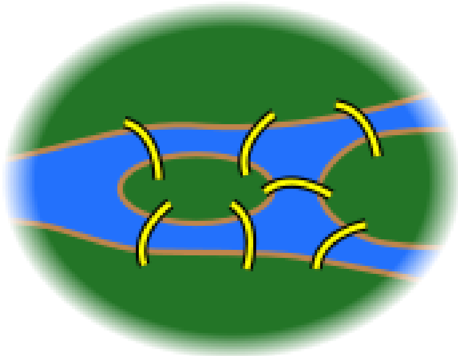
Introducción 1. (Suma de Gauss) Prueba que para todo n natural se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución:

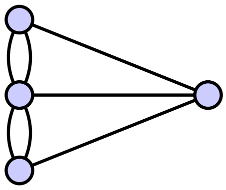


Introducción 2. (Puentes de Königsberg) En la ciudad de Königsberg hay 7 puentes dispuestos como en la figura siguiente.



¿Es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

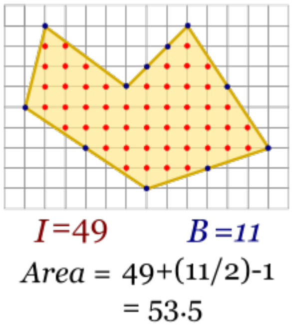
Solución: Se simplifica el mapa de la ciudad al siguiente diagrama (grafo), en el que cada punto (nodo) representa una masa de tierra y cada línea (arista) representa un puente:



Ahora reformulamos el problema. Consiste en buscar si existe algún camino, empezando por un nodo y terminando en otro nodo, que pase por todas las aristas una y solo una vez. Nótese que, cada vez que llegamos a un nodo usamos dos aristas: una para entrar y otra para salir. Excepto para el nodo de entrada y el nodo de salida. Luego todos excepto dos de los nodos deben de tener un número par de aristas para que el problema sea posible. Como esto no es así en el grafo anterior, no existe solución al problema original.

El siguiente teorema podrá usarse en algunos de los ejercicios.

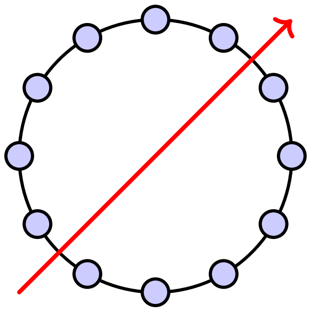
Teorema. (de Pick) Sea P un polígono dibujado en el plano, de tal forma que todos sus vértices tienen coordenadas enteras $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Si B es el número de puntos enteros en el borde, e I el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área del polígono se puede calcular con la fórmula $A(P) = I + \frac{B}{2} - 1$.



Solución: Link.

Problema 1. En un colgante de $4n$ perlas hay tantas perlas negras como blancas. Se pregunta si es siempre posible cortar el colgante en dos trozos (con dos cortes de tijera) de tal forma que en cada trozo queden exactamente tantas perlas negras como blancas.

Solución: El diagrama aquí viene de forma muy natural.



Nótese que el corte del las tijeras tiene dado una orientación. De esta manera, podemos describir correctamente los dos trozos sobrantes. Diremos "a la derecha" para referirnos al trozo que está, cuando la flecha apunta hacia arriba, a la derecha del corte. Análogamente con "a la izquierda".

Pues bien, empezamos cortando el collar por un sitio aleatorio (dejando $2n$ perlas a cada lado). Si a la derecha hay tantas blancas como negras, deben de haber n perlas de cada color. Luego a la izquierda habría $2n - n = n$ de cada color y habríamos terminado.

Si no tenemos tanta suerte, entonces resultará que a la derecha habrá un color mayoritario. Digamos por ejemplo que es el negro. Pues bien, rotemos la flecha de corte progresivamente hasta que haya girado 180 grados. Ahora, la situación se habrá revertido, y habrá más perlas blancas a la derecha de la flecha que negras.

La cuestión está en darse cuenta de que en algún momento en ese giro hemos pasado por el punto clave, en el que había un mismo número de perlas de cada color a cada lado.

Esto es así porque cada vez que giramos un poco la flecha (de manera que "entre" una nueva perla al trozo de la derecha y "salga" una perla del trozo de la derecha), la cantidad de perlas negras a la derecha cambiará por $-1, 0$ o 1.

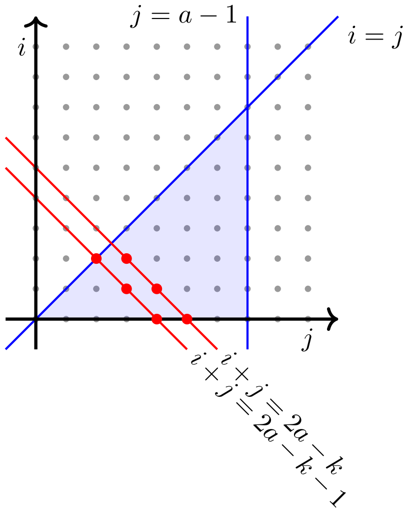
Entra	Sale	# Negras ahora - # Negras antes
negra	negra	0
negra	blanca	1
blanca	negra	-1
blanca	blanca	0

Problema 2. Fijado $a \in \mathbb{N}$, encuentra, para cada $k = 1, ..., 2a$, la cantidad de pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ que son solución a **alguna** de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} i + j = 2a - k \\ i + j = 2a - k - 1 \end{cases}$$

(Nota: Aquí $\mathbb{N}$ incluye al 0.)

Solución: Definimos el polígono $\tilde{\Delta}$ dado por $0 \leq i \leq j < a$. Tenemos que encontrar las soluciones a las ecuaciones dentro del polígono. Por ejemplo, para $a = 8, k = 11$, hemos sombreado $\tilde{\Delta}$ en azul, y vemos que hay 6 soluciones (marcadas en rojo).

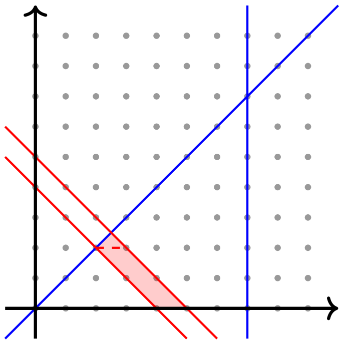


OPCIÓN 1

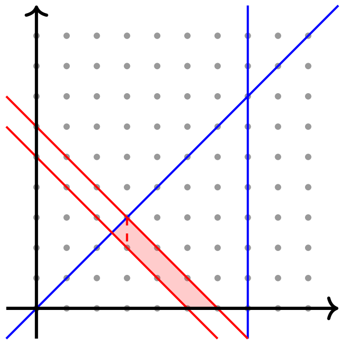
Podemos formar otro politopo Δ, dado por $\tilde{\Delta} \cap \{2a - k - 1 \leq i + j \leq 2a - k\}$. Entonces, la pregunta se convierte en contar el número de puntos enteros en el borde de Δ. Para calcularlo, usemos el teorema de Pick.

Supongamos que nuestro politopo tiene un lado en el eje $i = 0$ (*ie*, $k \geq a$). Entonces, tenemos politopos de 2 formas:

CASO k IMPAR



CASO k PAR



Nótese que todos cumplen $I = 0$, pero que no tienen todos los vértices enteros. En el primero, podemos quitar un "piquito" arriba y en el segundo nos sobra un "piquito" a la izquierda. Si quitamos esos "piquitos", calcular el área se vuelve más sencillo y se puede aplicar el teorema de Pick.

Cuando k es impar, la intersección entre $\{i = j\}$ y $\{i+j = 2a-k-1\}$ es $i = j = a - \frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}$. Luego se tiene

$$A = 1 \cdot \left(a - \frac{k+1}{2}\right) =^{Pick} I + \frac{B}{2} - 1 = \frac{B}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad B = 2a - k + 1$$

Cuando k es par, la intersección entre $\{i = j\}$ y $\{i + j = 2a - k\}$ es $i = j = a - \frac{k}{2} \in \mathbb{N}$. Mirando el dibujo se ve que

$$A = 1 \cdot \left(a - \frac{k}{2}\right) - \frac{1}{2} =^{Pick} \frac{B}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad B = 2a - k + 1$$

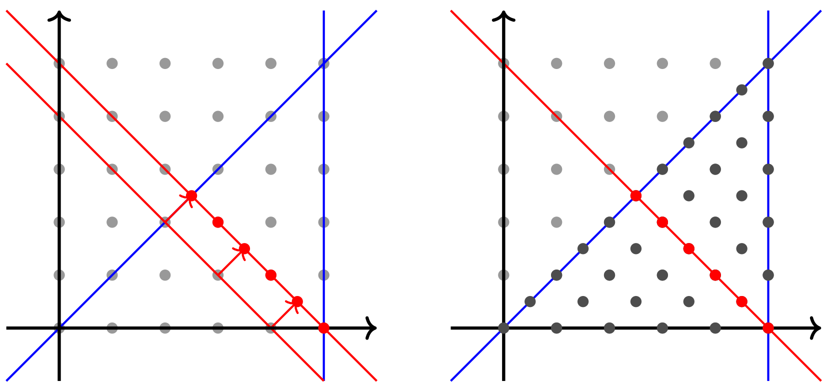
En cualquier caso llegamos al mismo resultado. Por simetría en $\tilde{\Delta}$, si k es $k < a$, la respuesta será $B = k$.

En definitiva, la solución al problema es $\min\{k, 2a - k + 1\}$. En una tabla,

k	1	2	$\cdots$	a	$a+1$	$\cdots$	$2a-1$	$2a$
	1	2	$\cdots$	a	a	$\cdots$	2	1

OPCIÓN 2

La otra opción que tenemos es proyectar las soluciones de una recta en la otra. Más concretamente, si $k \geq a$, proyectamos sobre $\{i+j = 2a-k\}$ y si $k < a$ proyectamos sobre $\{i+j = 2a-k-1\}$ (de forma que todas las proyecciones quedan dentro de Δ).



Uno puede ver que la solución es entonces $\min(k, 2a - k + 1)$. Es decir, que si k toma valores en $1, 2, ..., 2a$, entonces la respuesta a la pregunta original es

$$1, 2, 3, ..., a, a, ..., 3, 2, 1$$

OPCIÓN 3

Haciendo el cambio de variable

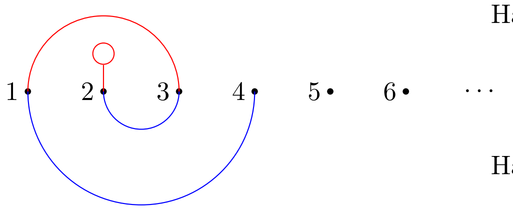
$$\begin{cases} I := k - i \\ J := k - j \end{cases}$$

tenemos el problema siguiente: encontrar las soluciones enteras no negativas a

$$\begin{cases} I + J = k \\ I + J = k + 1 \end{cases} \qquad 1 \leq I \leq J \leq a.$$

Si no tuviéramos la condición $J \leq a$ la respuesta sería k, como se ve en el diagrama para $k = 4$:

Hay $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = 2$ parejas rojas sumando a $k = 4$



Hay $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor = 2$ parejas azules sumando a $k + 1 = 5$

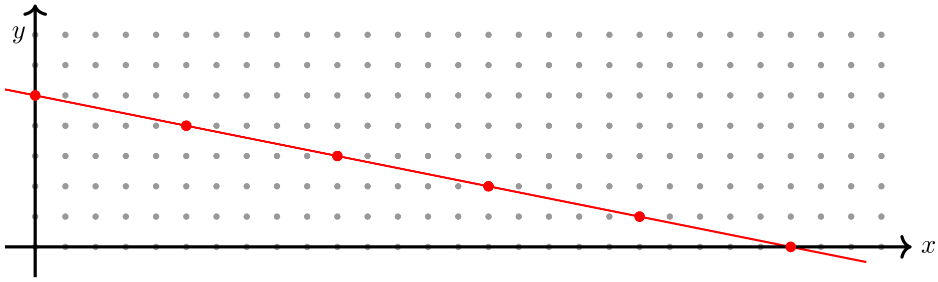
Introducir la condición $J \leq a$ fuerza la misma restricción que $I \geq 1$ pero a la derecha del diagrama, dando el resultado deseado.

Problema 3. ¿Cuántas formas hay de pagar 2.50 euros con monedas de 10, 20 y 50 céntimos?

Solución: Tenemos que resolver la ecuación $10z + 20x + 50y = 250$. Notemos que, dados x e y, podemos adivinar cuánto vale z. La ecuación se simplifica a

$$2x + 5y = 25 - z.$$

Obviamente, buscamos solo las soluciones enteras no negativas. Representemos la ecuación para $z = 0$ en el plano (x, y).



Tiene 6 soluciones. Pero, ¿qué pasa con los puntos que están por debajo de la recta? Estos puntos cumplen $2x + 5y \leq 25$. Pero entonces, si tomamos $z = 25 - 2x - 5y$, tenemos $2x + 5y = 25 - z$. Es decir: las soluciones al problema original son las que están dentro del triángulo.

Usando el teorema de Pick, podemos calcular cuántas soluciones hay:

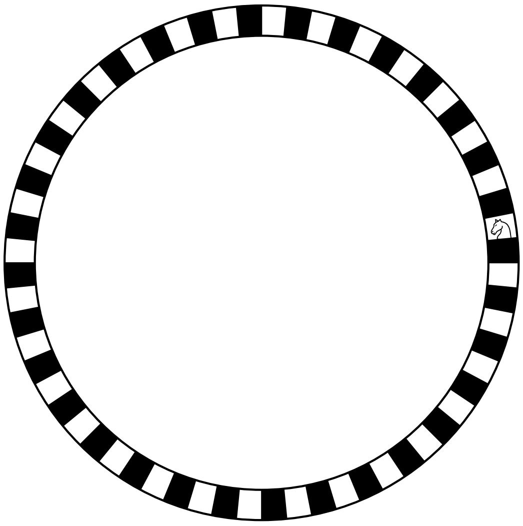
$$A(P) = \frac{25 \cdot 5}{2} =^{Pick} I + \frac{26 + 5 + 4}{2} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{125 - 35}{2} + 1 = 46$$

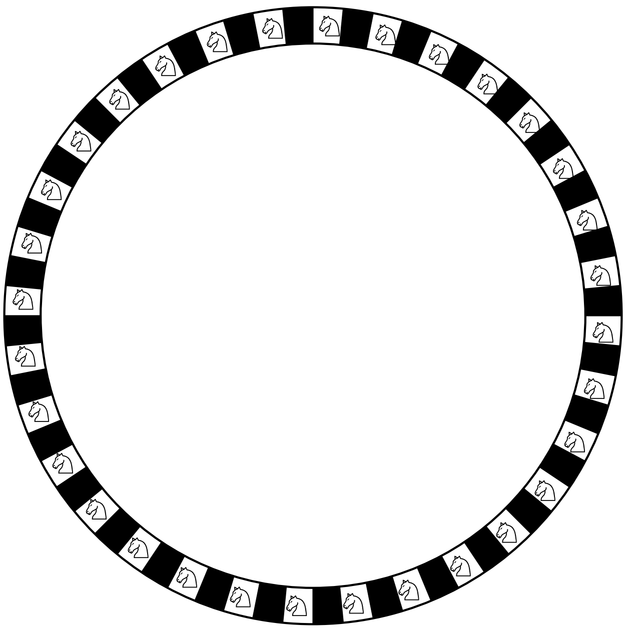
El total de soluciones es $B + I = 35 + 46 = 81$.

Problema 4. ¿Cuántos caballos caben en un tablero de ajedrez de manera que ninguno ataque a ningún otro?

Solución: Es algo extendido que un caballo puede viajar por todas las casillas del tablero, sin repetir, y volviendo a la casilla original. Pues bien, en lugar de dibujar el tablero de ajedrez en su forma usual, dibujaremos el camino que realiza el caballo en su viaje.

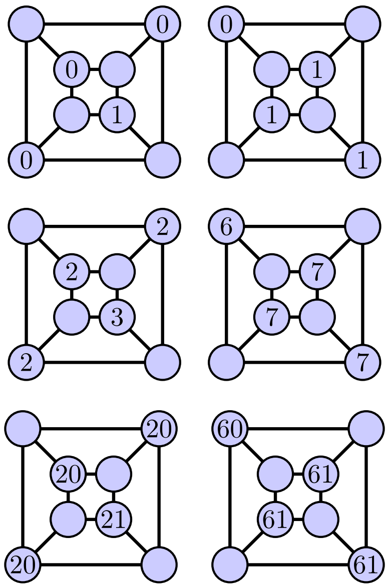


Empezamos colocando un caballo. En este círculo, el caballo se mueve una casilla abajo o una casilla arriba cada vez. Luego al poner ese caballo ahí estamos eliminando las dos casillas contiguas del conjunto de casillas posibles para colocar otro caballo. Es sencillo ahora ver que el máximo de caballos que caben es 32:



Problema 5. Una hormiga empieza en una cara F de un octaedro. Cada minuto, se mueve hacia una de las caras adyacentes a la que se encuentra con igual probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que la hormiga se encuentre en la cara F a los n minutos?

Solución: Vamos a hacer el grafo de las caras del octaedro. Para calcular la probabilidad, haremos $\frac{\text{caminos correctos}}{\text{caminos totales}}$. En cada nodo del grafo escribiremos pues el número de caminos totales que llegan a la cara representada por dicho nodo. Los grafos de los primeros 6 turnos:



La suma de todos los caminos totales de un grafo dado es $\frac{1}{3^n}$ (se puede razonar de varias maneras). Nótese que hay dos familias de nodos, una de las cuales es nula en los pares y la otra en los impares (ejercicio: ¿por qué?). Como el nodo con el que empezamos es de la familia que se anula en los impares, la probabilidad de que tras un número impar de turnos termine en la cara inicial es 0.

Además, los números que aparecen son siempre a_n y $a_n - 1$ (donde a_n se define como el número más grande que aparece). Veamos una tabla con estos números:

$a_n - 1$	0	0	2	6	20	60	...
a_n	1	1	3	7	21	61	...

¿Cómo obtengo a_{2n} a partir de a_{2n-2}? Es

$$a_{2n} = 3a_{2n-1} = 3\big((a_{2n-1} - 1) + 1\big) = 3\big((a_{2n-2} - 1) + 1\big) = 9a_{2n-2} - 6$$

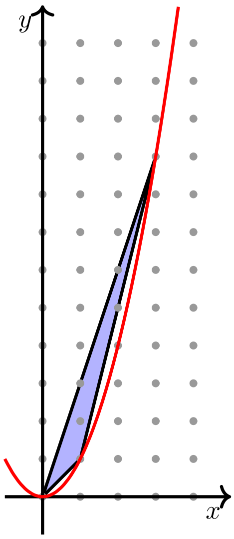
(se deja como ejercicio). Entonces,

$$P_n = \frac{\text{caminos correctos}}{\text{caminos totales}} = \frac{a_{2n}}{3^{2n}} = \frac{a_{2n-2}}{3^{2n-2}} - \frac{6}{3^{2n}} = \frac{a_{2n-4}}{3^{2n-4}} - \frac{6}{3^{2n-2}} - \frac{6}{3^{2n}} = \cdots$$

$$= \frac{a_0}{1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{9^k} = 1 - 6\frac{\frac{1}{9^{n+1}} - \frac{1}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{9^n}\right).$$

Problema 6. Sea $n \geq 3$ y entero. Prueba que podemos encontrar n puntos en el plano tales que la distancia entre dos cualesquiera es irracional, y tales que tres cualesquiera forman un triángulo de área racional (no nula).

Solución: Imaginemos que podemos poner todos estos puntos sobre una curva, en general, para todo n. Entonces, como buscamos que tres puntos cualesquiera no sean colineales, mejor si la curva es siempre convexa (o siempre cóncava). Dos ejemplos sencillos vienen a la cabeza: el círculo y la parábola.



Por otro lado, nos piden que los triángulos tengan área racional. Como hemos visto, esto sería casi inmediato si los puntos fueran de coordenadas enteras, gracias al teorema de Pick. Además, conocemos muchos ejemplos de puntos enteros que están a distancia irracional los unos de los otros. El (0,0) está a $d = \sqrt{2}$ del (1,1), sin ir más lejos.

¿Qué pasa si juntamos estas dos reflexiones? En un círculo fijo no hay infinitos puntos enteros, con lo que habría que variar el círculo con n. Quizás se complique la cosa. Pero en una parábola, por ejemplo $y = x^2$, sí que hay infinitos números enteros. Para cada n, consideramos entonces

$$S := \{(z, z^2) \ : \ z = 1, ..., n\}.$$

La distancia entre dos puntos de S es

$$\sqrt{(z-w)^2 + (z^2 - w^2)^2} = \sqrt{(z-w)^2 + (z-w)^2(z+w)^2} = |z-w|\sqrt{1 + (z+w)^2},$$

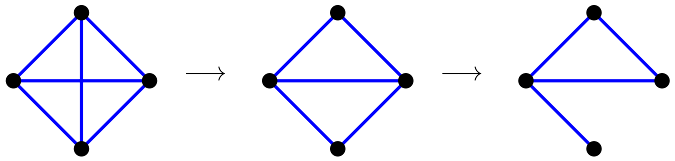
que es irracional porque $z + w$ es un cuadrado. Y no hay tres puntos colineales en una parábola, terminando la prueba.

Problema 7. Empieza con un grafo completo K_n. Elige un ciclo de tamaño 4, elige una arista cualquiera del ciclo y elimínala.

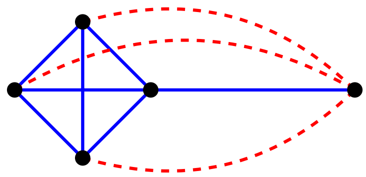
Para cada $n \geq 4$, encuentra el número mínimo de aristas con las que podemos quedarnos repitiendo ese proceso una y otra vez.

(*Un grafo es completo si cada par de vértices está conectado con una arista. Se dice K_n al grafo completo de n nodos.*)

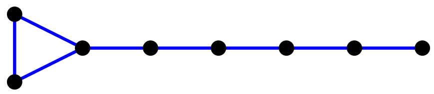
Solución: Empezamos viendo el caso $n = 4$. No tenemos elección:



Si ahora añadimos un nodo V más, que vendrá inicialmente unido a los 4 nodos, podemos eliminar uno por uno tres de las aristas y reducir el problema al anterior. Esto es así porque podemos elegir una arista $e : W \to V$ de V, y cada una de las otras aristas tiene asociada un 4-ciclo $V \to ? \to W \to V$, con lo que podemos eliminarla.



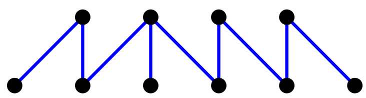
Luego siempre podemos terminar así:



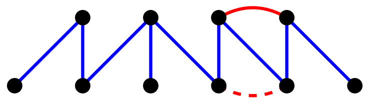
Es decir, con n aristas. Veamos que no se puede terminar con menos de n aristas.

Con menos de $n - 1$ no se puede terminar, ya que no estarían todos los nodos conectados. Y nuestro algoritmo es incapaz de separar los nodos (siempre deja cada 4 nodos conectados por 3 aristas). Es decir, la conexidad es un invariante del proceso.

Y si terminamos con $n - 1$ aristas a partir de K_n es porque en la situación final no tenemos ciclos (hay las aristas justas para que el grafo siga siendo conexo). Los árboles son bipartitos:



Y ser bipartito ¡es un invariante del proceso! En efecto, si hacemos el proceso inverso, pensemos en el momento en el que dejamos de ser bipartitos. Se tiene que crear una arista entre dos nodos de la misma parte. Pero ¡alto! Sólo podemos crear aristas si éstas completan un ciclo de 4. Necesariamente, ya debería de existir una arista uniendo dos nodos del otro grupo, lo que es imposible.



Como K_n no es bipartito, podemos terminar, como mínimo, con n aristas.

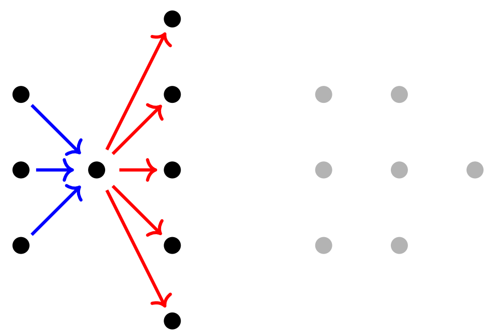
Problema 8. En Port Aventura hay 16 agentes secretos. Cada uno de ellos vigila a algunos de sus colegas. Se sabe que si el agente A vigila al agente B, entonces B no vigila a A. Además, 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, éste vigila al tercero, ..., el último (décimo) vigila al primero.

Demostrar que también se pueden numerar de este modo 11 agentes cualesquiera.

Solución: Para cada agente i, dividiremos el resto de los 15 espías en tres grupos: el grupo X_i de los agentes que vigilan a i, el grupo Y_i de los que son vigilados por i, y el grupo Z_i de los restantes. Es

$$|X_i| + |Y_i| + |Z_i| = 15 \quad \text{para todo } i.$$

Además, para cada agente podemos formar un diagrama como el siguiente:



con los que le vigilan, los que son vigilados y los restantes.

Si entre i, X_i y Z_i son 10 o más agentes, entonces cogiendo 10 cualesquiera de ellos se llega a un absurdo con la hipótesis. Lo mismo pasa con i, Y_i y Z_i. Luego

$$|X_i| + |Z_i| \le 8 \quad ; \quad |Y_i| + |Z_i| \le 8.$$

Juntando esto a la ecuación anterior, obtenemos $|Z_i| \le 1$ para cada i.

Ya hemos extraído del problema todo lo que necesitábamos. Supongamos que al coger a 11 agentes no se puede crear el ciclo que se describe en el enunciado. Tomando diez cualesquiera de ellos, formarán un ciclo $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{10} \to A_1$, y sobrará el agente A_{11}.

- Supongamos que ninguno de los agentes está en Z_{11}. Necesariamente, X_{11} tiene algún agente en el 10-ciclo, por ejemplo A_1. Entonces, A_{11} **no** vigila a A_2, pues de lo contrario se tendría $A_1 \to A_{11} \to A_2 \to \cdots \to A_1$ un 11-ciclo. Luego A_{11} es vigilado por A_2.

  Por inducción, tendremos que A_i está en X_{11} para todo $i = 1, ..., 10$, que es absurdo porque $|X_{11}| \le 8$.

- Por tanto, algún A_i debe ser neutral con A_{11}. Como cada espía tiene a lo sumo un agente en Z_i, deducimos que todos los agentes $A_1, ..., A_{11}$ tienen exactamente a un espía en Z_i, y que es uno de los agentes A_i. Pero si A_i está en Z_j entonces A_j está en Z_i, es decir, van por parejas. Y no se pueden organizar 11 personas por parejas. Absurdo.